وزارة التربية الوطنية

مديريتي التربية لولايتي أدرار و تيميمون — موقع عيون البصائر التعليمي — ثانويات المقاطعة الأولى

الشعبة : رياضيـــــات — دورة ماي 2022

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات — المدة : أربع ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (03.5 نقاط و نصف)

نعتبر المعادلة التفاضلية: $y'-2y=(x-3)e^{x}$..........(E)

1) عين قيمتي العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة $g:x\longmapsto(ax+b)e^{x}$ حلا لـ (E) .

2) عين حلول المعادلة التفاضلية: $y'-2y=0$..........(E') .

3) أثبت أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية (E') .

4) استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E) ، ثم استنتج الحل الذي يحقق $y(0)=4$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط و نصف)

لتكن X_n و Y_n المتتاليتين المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي:

$$\begin{cases} X_0=5 \\ X_{n+1}=3X_n-2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} Y_0=1 \\ Y_{n+1}=3Y_n+8 \end{cases}$$

1) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (U_n) بالعبارة: $U_n=X_n-1$.

أ) بين أن المتتالية (U_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n=4\times3^{n}+1$.

2) بين أن: $PGCD\,(X_{n+1};X_n)$ يقسم 2 ، ثم استنتج أن: $PGCD\,(X_{n+1};X_n)=1$.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5X_n-4Y_n=21$.

ب) استنتج عبارة Y_n بدلالة n ، ثم جد القيم الممكنة لـ: $PGCD\,(X_n;Y_n)$.

4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{n} على 7 .

ب) بين أنه إذا كان: $n\equiv5[6]$ ، فإن: $PGCD\,(X_n;Y_n)=7$.

ج) استنتج قيمة $PGCD\,(X_{2021};Y_{2021})$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على n كرية بيضاء ($n\geqslant2$)، 5 كريات حمر و 3 كريات خضراء. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1) ماهو احتمال الحصول على كريتين بيضاوين.

2) نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون.

أ) أ- أثبت أن: $P(n)=\dfrac{n^{2}-n+26}{(n+7)(n+8)}$.

ب) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$ ، ثم فسر النتيجة.

3) نضع $n=4$ ، يقوم لاعب بسحب كريتين من الوعاء في آ ن واحد ثم يرجعهما ويسحب كريتين أخريين، لإجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مبلغا قدره 30 دينارا، وبعد كل سحب يتحصل على 40 دينارا إذا كانت الكريتان من نفس اللون، وإلا تحصل على 5 دنانير فقط.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبين مقدار ربح هذا اللاعب.

أ) عين قيم المتغير X .

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم، f_n الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f_n(x)=\dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$ وليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) نضع $n=1$

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f_1(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f_1 ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_1) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

2) نضع $n=2$

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f_2(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f_2 ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) ا) ادرس إشارة الفرق $f_1(x)-f_2(x)$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أنشئ كلا من المنحنيين (C_1) و (C_2) .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $I_n=\int_1^e f_n(x)dx$

ا) نضع $F(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ ، احسب $F'(x)$ ثم استنتج I_1 .

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$.

ج) احسب I_2 ، ثم استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=e$.

5) ا) اعتمادا على السؤال (4−ب)، برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\frac{1}{n!}I_n=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right).$$

ب) باستعمال حصر للعدد $\ln x$ على المجال $[1;e]$ ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$0\le I_n\le 1$

ج) استنتج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dots+\dfrac{1}{n!}\right)$

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نفرض الأعداد: $a_n = 4\times10^n - 1$ ، $b_n = 2\times10^n - 1$ و $c_n = 2\times10^n + 1$

I) 1) احسب a_n ، b_n و c_n من أجل قيم n تساوي: 1 ، 2 و 3 .

2) ماهو عدد أرقام العددين a_n و c_n ؟

3) بين أن العددين a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 و بين أن العدد b_3 أولي.

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$.

5) استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 .

6) باستعمال الخاصية: $PGCD(a;b) = PGCD(a;a-b)$

- بين أن: $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$ ، ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين $(x;y)$: $b_3x + c_3y = 1..........(*)$.

1) برر أن المعادلة $(*)$ تقبل على الأقل حلا.

2) طبّق خوارزمية إقليدس على b_3 و c_3 لإيجاد حل خاص للمعادلة $(*)$.

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

U_1 صندوق يحتوي على 3 كريات حمراء وكريتين خضراء ، و U_2 صندوق آخر يحتوي على كريتين حمراوين و 3 كريات خضراء ، الكريات متجانسة لانفرق بينها باللمس، نقوم عشوائيا بسحب كرية من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ، ثم نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين في آن واحد.

نرمز بـ R_1 للحادثة: "سحب كرية حمراء من الصندوق U_1 " وبالرمز A للحادثة: "سحب كريتين حمراوين من الصندوق U_2 ".

1) احسب الاحتمالين $P(R_1)$ و $P(R_1 \cap A)$.

2) تحقق أن: $P(A) = \dfrac{11}{75}$ ، هل الحادثتان R_1 و A مستقلتان؟برر

3) علما أن الكريتين المسحوبتين من U_2 حمراوان، مااحتمال أن الكرية المسحوبة من U_1 كانت حمراء ؟

4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. نضيف n كرية حمراء إلى الصندوق U_1 ، ونعيد التجربة العشوائية السابقة؛ حيث يربح اللاعب 5 دنانير عند كل سحب لكرية خضراء من U_2 ، ويخسر 10 دنانير عند كل سحب لكرية حمراء من الصندوق U_2 .

نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي مقدار أرباح اللاعب في هذه اللعبة.

أ) بين أن: $P(X=-5) = \dfrac{9n+43}{15(n+5)}$.

ب) أعط، بدلالة n ، قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضيتي.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي: $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون:

$u_{n+1} \le 0,95u_n$ إذا وفقط إذا كان: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \le 1,9$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

أ) ادرس تغيرات الدالة f على مجال تعريفها، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ حيث: $f(\alpha)=1{,}9$.

ج) عين العدد الطبيعي n_0 ، بحيث: $n_0-1<\alpha<n_0$.

د) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 16$ يكون: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9$.

3) أ) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ابتداء من الرتبة 16 .

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) .

4) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n يحقق $n\geq 16$ يكون: $0\leq u_n\leq (0{,}95)^{n-16}\times u_{16}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=e^{x}(x-1)+1$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيرّاتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$.

II) لتكن الدالة العددية I المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $I(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$.

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة، أثبت أن : $I(x)=e^x-(1+x)$.

2) ليكن x عددا حقيقيا موجبا، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $[0;x]$ يكون: $1\leq e^t\leq e^x$

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2}\leq I(x)\leq \frac{x^2e^x}{2}$.

3) ليكن x عددا حقيقيا سالبا، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $[x;0]$ يكون: $e^x\leq e^t\leq 1$

ثم استنتج أن: $\frac{x^2e^x}{2}\leq I(x)\leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

III) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-1}{x};x\neq 0\\ f(0)=1\end{cases}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 .

3) احسب $f'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f .

4) عين معادلة المماس (T) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .